

Optimisation et théorie de la commande robuste

D. Arzelier, J. Bernussou, D. Henrion, D. Peaucelle
LAAS-CNRS

① Quelques problèmes d'optimisation en Automatique

⇒ Modélisation

⇒ Analyse

⇒ Synthèse

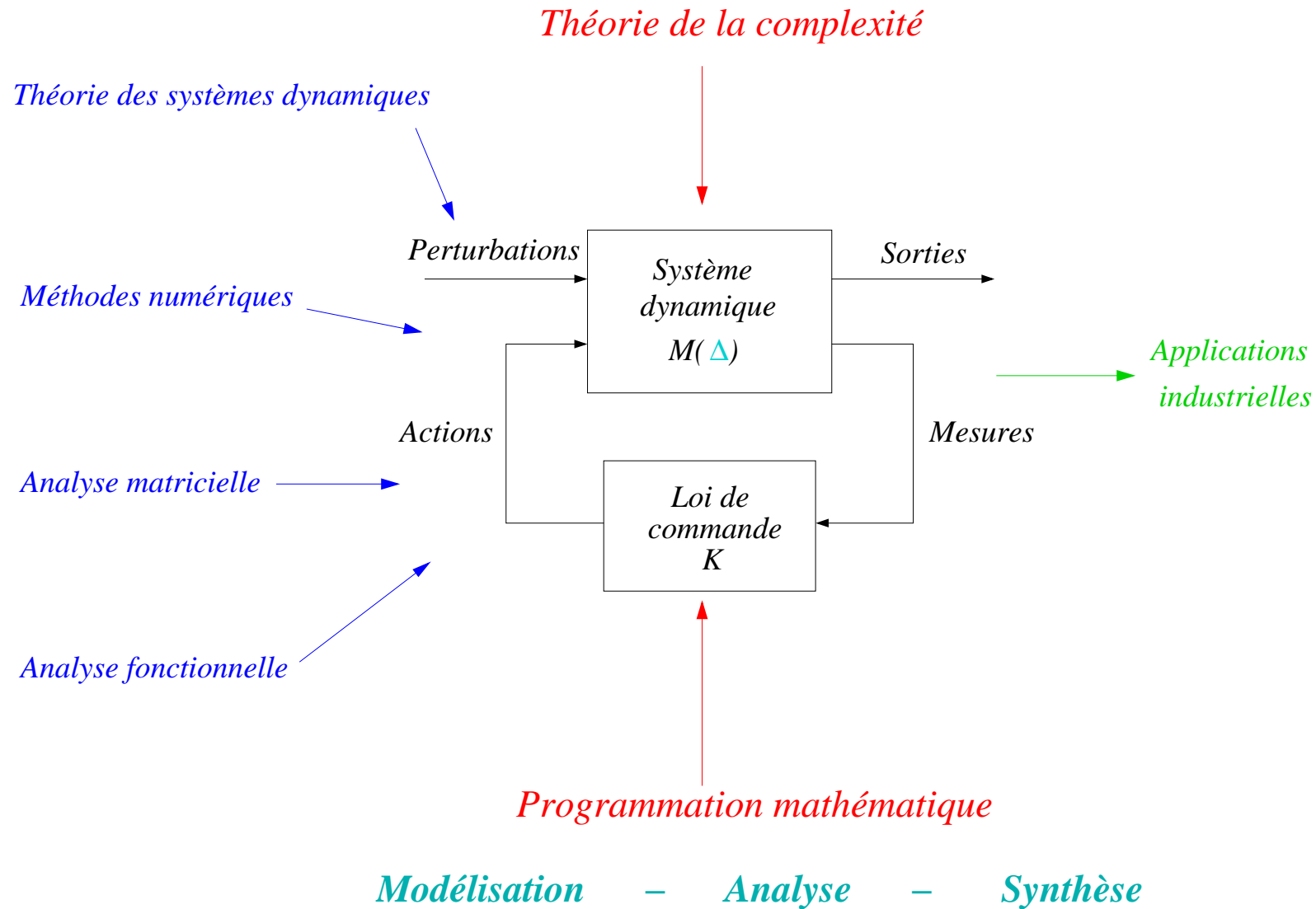
② Quelques méthodes usuelles de programmation mathématique

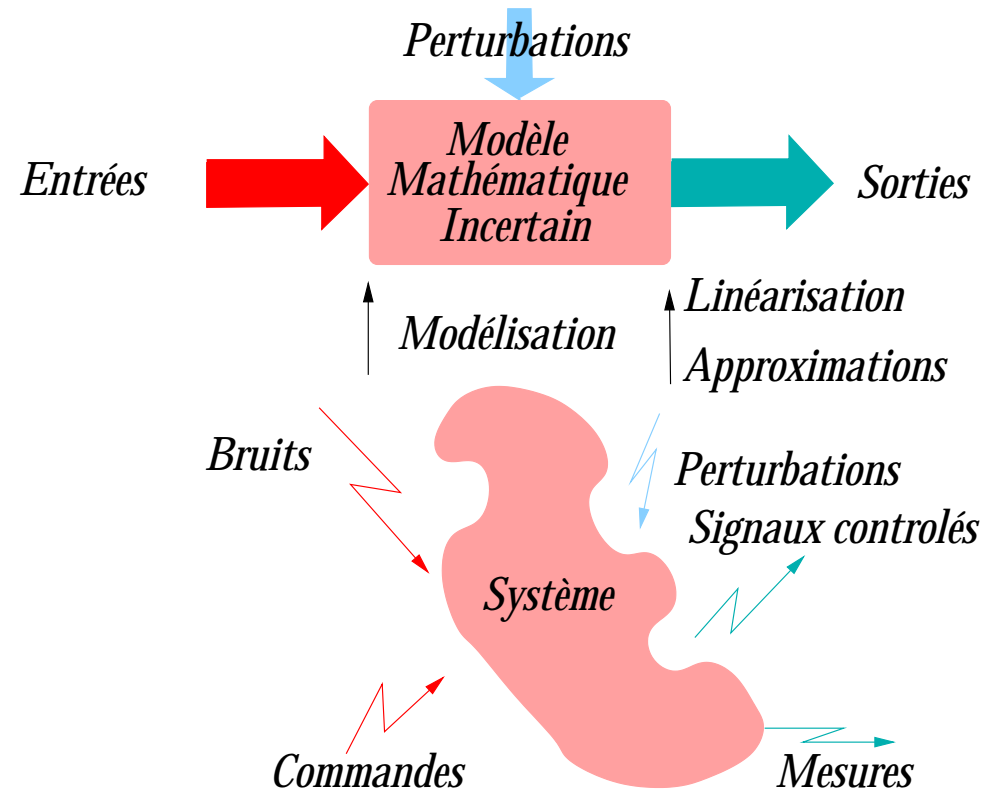
⇒ Les relaxations convexes

⇒ Les heuristiques

⇒ L'optimisation globale

③ Quelques perspectives





Modélisation : expression des lois physiques et des connaissances expérimentales

Modèle mathématique incertain : ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entrées-sorties + une représentation mathématique de l'incertitude

- Modèle externe : **matrice de transfert**

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad G(s) \in \mathbb{C}^{r \times m}$$

- Modèle interne : **représentation d'état**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$C \in \mathbb{R}^{r \times n} \quad D \in \mathbb{R}^{r \times m}$$

$$G(s) = D + C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B$$

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

Caractérisation de l'incertitude

- Mathématique

complexe ou réelle

- Physique

paramétrique ou non paramétrique

- Géométrie

polytopique ou ellipsoïdale

- Complexité

structurée ou non structurée

- Forme

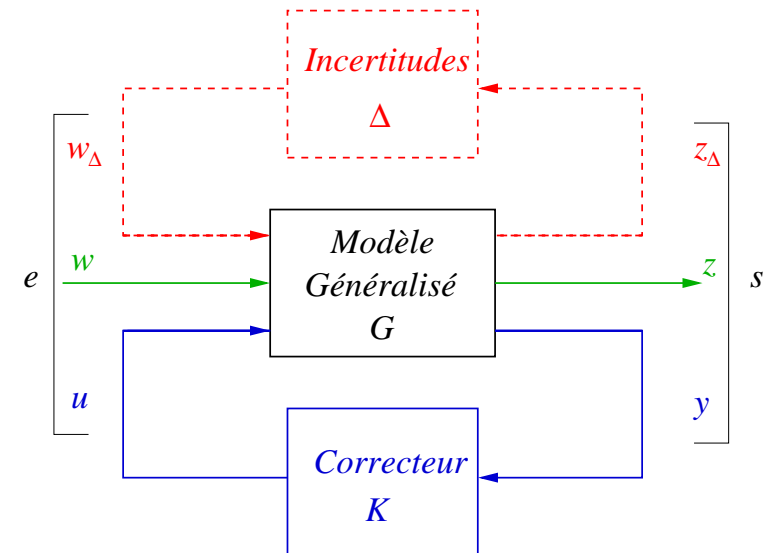
LFT ou Affine

- Nature temporelle

statique ou variant

$$G(\Delta) = G_0 + \begin{bmatrix} B_\Delta \\ D_{z\Delta} \\ D_{y\Delta} \end{bmatrix} \Delta_f \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta w} & D_{\Delta u} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \Delta(\mathbf{1} + D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1}$$



- w : entrées exogènes et w_Δ : entrées exogènes fictives
- u : signaux de commande et y : sorties capteurs
- z : sorties exogènes à contrôler et z_Δ : sorties exogènes fictives

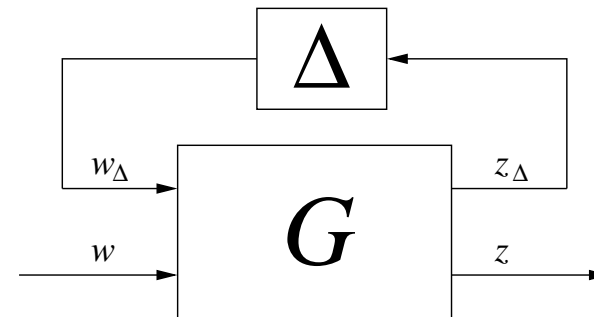
Soient $G \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_\Delta \\ \hline C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \end{array} \right]$ et $\Delta = \{\Delta = \text{diag}(\delta_i \mathbf{1}_{n_i}) , \delta_i \in \mathbb{C} , |\delta_i| \leq 1\}$

⚡ **Problème 1** : *Minimalité de la représentation LFT*

Peut-on trouver $G_r \sim \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_{r\Delta} \\ \hline C_{r\Delta} & D_{r\Delta\Delta} \end{array} \right]$ et Δ_r t.q. :

$$\|(\Delta \star G) - (\Delta_r \star G_r)\|_{si_2} = \sup_{\Delta \in \Delta} \|(\Delta \star G) - (\Delta_r \star G_r)\|_{\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2} = 0$$

$$\Delta \star G = G(\Delta) \quad \equiv$$



Problème d'optimisation non convexe sur \mathcal{S}_n^+ :

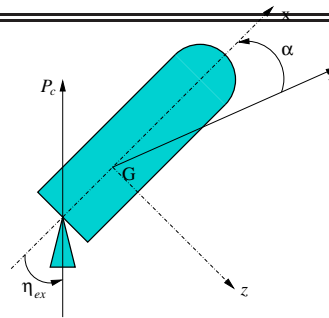
$$\begin{aligned} & \min_{X, Y \in \mathcal{S}_n^+} \text{rang}(XY) \\ \text{sous} & \quad \Delta X = X \Delta \quad \forall \Delta \in \Delta \\ & \quad \Delta Y = Y \Delta \quad \forall \Delta \in \Delta \\ & \quad A' X A - X + C' C \leq 0 \\ & \quad A Y A' - Y + B B' \leq 0 \end{aligned}$$

où X , Y sont les **grammiens généralisés**

Nota :

$\text{rang}(XY)$ est une fonction non convexe semi-continue inférieurement sur l'espace des coefficients de X et Y

Modèle incertain d'un missile : [Hiret98]



$$\begin{bmatrix} \dot{a}_z \\ \dot{q} \\ \dot{\eta}_{ex} \\ \ddot{\eta}_{ex} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_z \\ q \\ \eta_{ex} \\ \dot{\eta}_{ex} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_0^2 \end{bmatrix} \eta_{co}$$

$$a_i = \begin{bmatrix} 1 & M & z & M^2 & z^2 & Mz & Mz^2 & M^2z \end{bmatrix} K \quad i = 1, \dots, 7$$

Réduction exacte de la représentation LFT :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_M \mathbf{1}_{49}, \delta_z \mathbf{1}_{49}) \rightarrow \Delta_r = \text{diag}(\delta_M \mathbf{1}_6, \delta_z \mathbf{1}_6)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \sum_{i=1}^N \lambda_i A^{[N]} \quad \lambda_i > 0 \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \\ A \in \mathcal{A} = \text{co} \{ A^{[1]}, \dots, A^{[N]} \} \end{array} \right.$$

⬅ Problème 2 :

A est-il stable ? $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^- \quad \forall A \in \mathcal{A}$

- Problème **NP-complet** [Coxson-DeMarco91], [Nemirovskii93]
- **Différentes approches :**
 - ✓ La conjecture des sommets est fautive [Bialas83]
 - ✓ Approche géométrique [Cobb-DeMarco89]
 - ✓ Approche combinatoire [Yedavalli02]

□ **Théorème 1** : *Lyapunov*

$\dot{x}(t) = Ax$ est stable ssi :

$$\exists P = P' > \mathbf{0} \quad A'P + PA < \mathbf{0}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2x_1 & -3x_2 + x_1 \\ \star & -4x_3 + 2x_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

Problème LMI (SDP) :

$$\begin{array}{ll} \min_x & c'x \\ \text{sous} & A + \sum_{i=1}^n B_i x_i < \mathbf{0} \end{array}$$

Condition de Lyapunov :

$$\forall \lambda \exists P_\lambda > \mathbf{0} \quad A'(\lambda)P_\lambda + P_\lambda A(\lambda) < \mathbf{0}$$

Définissant $\mathcal{P} = \{P : P > \mathbf{0}, \lambda_{max}(P) = 1\}$

□ **Théorème 2** : *jeu à deux joueurs et somme nulle*

A est stable ssi :

$$J = \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{P \in \mathcal{P}} \lambda_{max}(A'P + PA) = \max_{A \in \mathcal{A}} \phi(A) < 0$$

Nota :

problème non trivial de théorie des jeux ($\phi(A)$ généralement non différentiable et non concave) pour lequel il est difficile de tester **la condition du point-selle**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^r \text{ et } u \in \mathbb{R}^m$$

☛ Problème 3 :

Déterminer $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$ telle que $A + BKC$ soit stable

- Problème **décidable** [Anderson75]
- **Différentes approches**
 - ✓ Procédures de décision de Tarski-Seidenberg [Anderson75]
 - ✓ Méthodes de PNL brutales [Levine-Athans70]
 - ✓ Approches BMI

□ Théorème 3 :

Déterminer des solutions réalisables pour :

- Formulation BMI :

$$P > \mathbf{0} \quad (A + BK C)' P + P(A + BK C) < \mathbf{0}$$

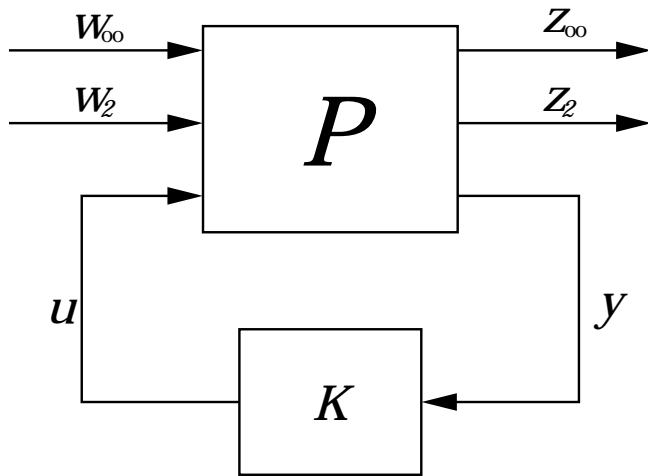
- Optimisation LMI avec contrainte de rang :

$$\begin{aligned} B^\perp (AX + XA') B^{\perp'} < \mathbf{0} \\ C'^\perp (A'Y + YA) C'^{\perp'} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad X = Y^{-1} \text{ ou } \text{rang} \begin{bmatrix} X & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & Y \end{bmatrix} = n$$

- Paramétrisation d'un ellipsoïde non vide :

$$Z > \mathbf{0} \quad P > \mathbf{0} \quad X \leq YZ^{-1}Y'$$

$$\mathcal{L}(P, X, Y, Z) < \mathbf{0}$$



$$P(s) := \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_\infty & B_2 & B \\ \hline C_\infty & D_\infty & \mathbf{0} & D_{\infty u} \\ C_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{2u} \\ C & D_{y\infty} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

➡ Problème 4 :

Etant donné un niveau de performance \mathcal{H}_∞ admissible γ , déterminer **un retour de sortie admissible**, $K \in \mathcal{K}_{adm}$, tel que :

$$\inf_{K \in \mathcal{K}_{adm.}} \|T_{z_2 w_2}(K)\|_2 \quad (1)$$

$$\text{sous } \|T_{z_\infty w_\infty}(K)\|_\infty \leq \gamma$$

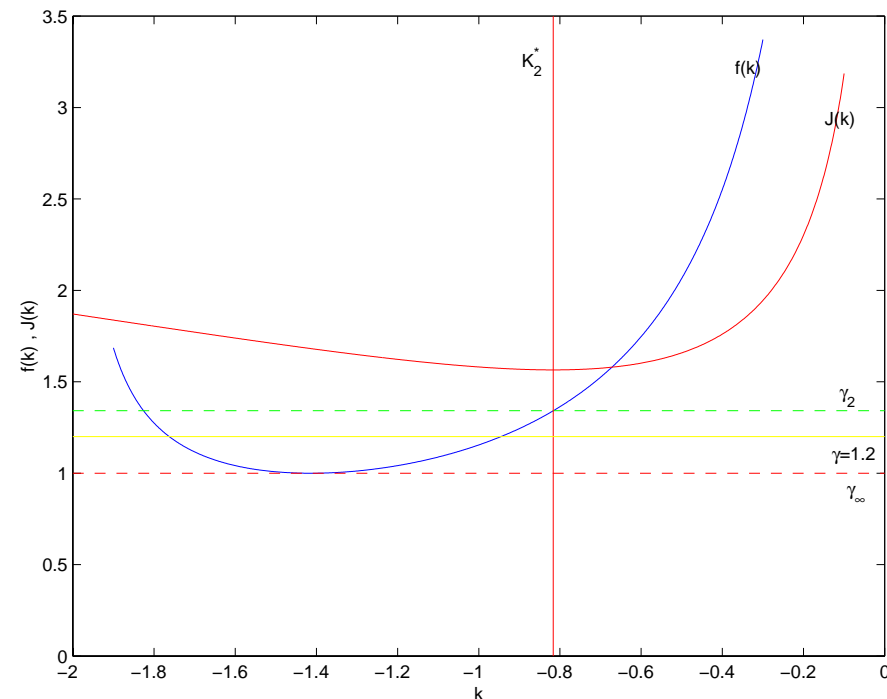
- Problème ouvert sans solution **analytique** ni **numérique** générale
- Compromis entre l'optimisation de la **performance nominale** et une contrainte de stabilité **robuste**

SOUS

$$\min_k J(k) = \sqrt{\frac{2 + 3k^2}{2k}}$$

$$k < 0$$

$$f(k) = \frac{2}{\sqrt{k^2(4 - k^2)}} \leq \gamma$$



$$P_{bf}(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A_{bf} & B_{\infty bf} & B_{2bf} \\ \hline C_{\infty bf} & D_{\infty bf} & \mathbf{0} \\ C_{2bf} & D_{2\infty bf} & \mathbf{0} \end{array} \right] := \left[\begin{array}{c|cc} A + BK C & B_\infty + BK D_{y\infty} & B_2 \\ \hline C_\infty + D_{\infty u} K C & D_\infty + D_{\infty u} K D_{y\infty} & \mathbf{0} \\ C_2 + D_{2u} K C & D_{2u} K D_{y\infty} & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

$$\min_{X_2, X_\infty, K} \text{trace}(B'_{2bf} X_2 B_{2bf})$$

sous

$$A'_{bf} X_2 + X_2 A_{bf} + C'_{2bf} C_{2bf} < \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc} A'_{bf} X_\infty + X_\infty A_{bf} + C'_{\infty bf} C_{\infty bf} & X_\infty B_{\infty bf} + C'_{\infty bf} D_{\infty bf} \\ \star & D'_{\infty bf} D_{\infty bf} - \gamma^2 \mathbf{1} \end{array} \right] < \mathbf{0}$$

Identification robuste :

- Identification fréquentielle
- Validation de modèle

Analyse robuste en stabilité et performance :

- Modèle incertain LFT : théorie du μ
- Recherche de multiplieurs et théorie de la séparation des graphes
- Analyse robuste par les IQC's

Synthèse :

- μ -synthèse
- Synthèse multi-objectif
- Synthèse avec contrainte de structure

Problème BMI :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{sous} \quad & A + \sum_{i=1}^n B_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n C_{i,j} x_i x_j < \mathbf{0} \end{aligned}$$

Problème avec contrainte de rang :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{sous} \quad & A + \sum_{i=1}^n B_i x_i < \mathbf{0} \\ & \text{rang}(C + \sum_{i=1}^n D_i x_i) \leq N \end{aligned}$$

Problème de complémentarité conique :

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Trace}(ZF) \\ \text{sous} \quad & (F, Z) \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

Minimisation concave :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sous} \quad & A + \sum_{i=1}^n B_i x_i < \mathbf{0} \\ & f \text{ concave} \end{aligned}$$

✓ Les relaxations convexes de l'Automatique :

- Lyapunov shaping paradigm + changement de variables linéarisant
- Lemme d'élimination

✓ Les relaxations Lagrangiennes et hiérarchiques :

- \mathcal{S} -procédure et relaxation de rang
- Polynômes positifs, SOS, théorie des moments

✓ Les heuristiques :

- Méthode du cône complémentaire
- Méthode de descente coordonnée

✓ L'optimisation globale

Le Lyapunov shaping paradigm :

Relaxation du problème **max-min** en problème **min-max** d'optimisation **convexe**

$$J = \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{P \in \mathcal{P}} \lambda_{max}(A'P + PA) < J_{quad} = \min_{P \in \mathcal{P}} \max_{A \in \mathcal{A}} \lambda_{max}(A'P + PA)$$

□ **Théorème 4** : *test de stabilité quadratique*

Si

$$\exists P > \mathbf{0} \mid A'_i P + P A_i < \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

alors $\dot{x} = Ax$ est stable $\forall A \in \mathcal{A} = co \{A^{[1]}, \dots, A^{[N]}\}$

Nota :

P est une variable de Lagrange issue d'une relaxation Lagrangienne ! [ElGhaoui00]

□ **Lemme 1** : *Le lemme d'élimination (ou de Finsler)*

Soient $\mathcal{L} \in \mathcal{S}^n$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $\text{rang}(\mathcal{R}) < n$:

$$\mathcal{R}^{\perp'} \mathcal{L} \mathcal{R}^{\perp} < \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \exists H \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid \mathcal{L} + H\mathcal{R} + \mathcal{R}'H' < \mathbf{0}$$

□ **Théorème 5** : *test de stabilité robuste*

Si $\exists N$ matrices $P_i > \mathbf{0}$, \mathbf{F} et \mathbf{G} |

$$\mathcal{P}(P_i) + \begin{bmatrix} A'_i \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F' & G' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F' \\ G' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_i & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

alors $\dot{x} = Ax$ est stable $\forall A \in \mathcal{A} = \text{co} \{A^{[1]}, \dots, A^{[N]}\}$.

Nota : P_i et $\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$ sont des variables issues de relaxations Lagrangiennes !

Soit le problème (1) :

$$\begin{array}{ll} \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sous} & h_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

Le Lagrangien : $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\mathbf{x}) \quad \lambda_i \geq 0$

Le problème dual :

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m+}} \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m+}} \theta(\boldsymbol{\lambda})$$

- La fonction duale $\theta(\boldsymbol{\lambda})$ est **concave** et **semi-continue supérieurement**
- Résoudre le dual du dual revient à résoudre une **relaxation convexe** de (1)

$\dot{x} = Ax$ $A \in \mathcal{A}$ est stable ssi $(s\mathbf{1} - A)^*(s\mathbf{1} - A) > 0 \forall A \in \mathcal{A}, \forall s \mid s + s^* \geq 0$

En posant $p = sx$ et en “gelant” l’incertitude :

$$(p - Ax)^*(p - Ax) > 0 \quad \forall (p, x) \neq 0 \mid p = sx \text{ pour } s + s^* \geq 0$$

$$(p - Ax)^*(p - Ax) > 0 \quad \forall (p, x) \neq 0 \mid px^* + xp^* \geq 0$$

Relaxation Lagrangienne : $\exists P > \mathbf{0}$

$$\forall (p, x) \neq 0 \quad (p - Ax)^*(p - Ax) > \text{trace}(P(px^* + xp^*))$$

d’où le test de stabilité quadratique : $\exists P > \mathbf{0} \quad A_i'P + PA_i < \mathbf{0}$

- **S-procédure** : relaxation Lagrangienne pour h_i quadratiques

- **Relaxation de rang** : $X = \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}^*$ duale de la relaxation Lagrangienne

Soient $g_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$ des fonctions polynomiales à plusieurs indéterminées :

➔ **Problème 5** :

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & g_0(x) \\ \text{sous} & g_k(x) \geq 0 \quad k = 1, \dots, m \end{array}$$

- **Relaxations LMI successives** : dualité conique [Nesterov00], géométrie algébrique, décomposition des polynômes en somme de carrés [Parillo00], théorie des moments [Lasserre01]
- **Hiérarchie** de relaxations convexes de moins en moins pessimistes avec garantie de convergence (asymptotique) vers l'optimum global
- Augmentation du **nombre de variables** et du **nombre de contraintes**
- **GloptiPoly** (Matlab+SeDuMi) : <http://www.laas.fr/henrion/software/gloptipoly>

- La méthode du **gradient contraint : complémentarité conique** [ElGhaoui97]

$$\min_{(X,Y) \in \mathcal{LMI}} \text{trace}(XY) \quad \rightarrow \quad \min_{(X,Y) \in \mathcal{LMI}} \text{trace}(X_k Y + Y_k X)$$

Initialisation aisée et décroissance monotone du critère

Phénomène de plateau, non garantie d'optimum local et test d'arrêt

- Les méthodes de **descente coordonnée** :

Demi – étape k_1

$$\min_{X \in \mathcal{LMI}} f(X, Y_k)$$

Demi – étape k_2

$$\min_{Y \in \mathcal{LMI}} f(X_k, Y)$$

Facilité de mise en oeuvre, test d'arrêt et décroissance monotone du critère

Initialisation périlleuse et non garantie d'optimum local

- Les méthodes de Branch and Bound :

Découpage heuristique de l'espace de recherche et calculs de bornes inférieures et supérieures sur les sous-domaines.

Convergence des bornes inférieures et supérieures vers l'optimum global

Problèmes BMI généraux [Goh-Safonov94]

Problèmes de minimisation concave [Apkarian-Tuan99]

- Approche primal-relaxé dual (**Décomposition généralisée de Benders**) :

Calcul de la marge de stabilité, [Psarris-Floudas90]

Retour de sortie statique avec contraintes [Beran-Vandenberghe-Boyd97]

Nota :

Méthodes généralement complexes à régler et peu systématiques

Les enjeux théoriques et numériques : BMI

- Les méthodes du Lagrangien augmenté [Apkarian02]
- Les méthodes de Barrière [Nesterov94]
- Les méthodes non différentiables (Bundle) [Oustry00, Helmberg01]

Les enjeux numériques : LMI de grande taille (nbre de variables et de lignes)

- Rapidité, fiabilité des solveurs, réalisabilité stricte, exploitation de la structure creuse et/ou bloc Toeplitz/Hankel [Nesterov02, Vandenberghe02]

Les enjeux théoriques et numériques : la dualité

- Au delà de la dualité SDP et Lagrangienne ?